Universidad Simón Bolívar
Departamento de Computación y Tecnología de la Información
CI3725 – Traductores e Interpretadores
Abril – Julio 2012

Guía Corta: Derivadas

1 Derivada de un Lenguaje

Sea Σ un alfabeto, L un Lenguaje sobre Σ y a un símbolo en Σ; se define la derivada D_aL, de L con respecto a a, como:

$$D_aL = \{w|aw \in L\}$$

Nótese que D_aL corresponde al lenguaje de todas las frases en L que comiencen con el símbolo a, a las cuales se les elimina dicho primer símbolo. A continuación algunos ejemplos sobre el alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$:

- Sea $L = \{aba, abb, bab, b\}$
  a) $D_aL = \{ba, bb\}$
  b) $D_bL = \{ab, \lambda\}$
- Sea $L = \{a^nb^n|n \geq 0\}$
  a) $D_aL = \{a^nb^{n+1}|n \geq 0\}$
  b) $D_bL = \emptyset$
- Sea $L = \{a^ib^j|j \geq i \geq 0\}$
  a) $D_aL = \{a^ib^j|j > i \geq 0\}$
  b) $D_bL = \{b^j|j \geq 0\}$
- Sea $L = \emptyset$
  a) $D_aL = \emptyset$
  b) $D_bL = \emptyset$

La definición de derivada puede extenderse para tratar con frases de un alfabeto Σ, además de símbolos. Tal extensión vendría definida por las siguientes ecuaciones:

$$D_\lambda L = L$$

$$D_{wa}L = D_a(D_wL), \text{ con } a \in \Sigma, w \in \Sigma^*$$

Nótese que el efecto de aplicar esta derivada sobre frases es análogo, en su comportamiento, a aplicar la derivada sobre símbolos. En este caso, si se aplica la derivada a L, sobre una frase w, entonces el lenguaje resultante es todas aquellas frases de L que comiencen con w, eliminando dicho w del inicio de las últimas.

Como ejemplo, consideremos $L = \{a^n b^n | n \geq 0\}$:

$$D_{aaab}L = \{bb\}$$

Habiendo considerado el caso general, nos concentraremos nuevamente en derivadas sobre símbolos. Sea Σ un alfabeto, $a \in \Sigma$ un símbolo y $S, T \in 2^{\Sigma^*}$ lenguajes sobre Σ, podemos enunciar las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned}
D_a(S \cup T) &= D_a S \cup D_a T \\
D_a(S \cdot T) &= \begin{cases} (D_a S) \cdot T \cup D_a T & \text{si} \;\; \lambda \in S \\ (D_a S) \cdot T & \text{si} \;\; \lambda \notin S \end{cases} \\
D_a(L^*) &= (D_a L) \cdot L^*
\end{aligned}$$

Procederemos entonces a probar estas propiedades:

a) $D_a(S \cup T) \;=\; D_a S \cup D_a T$

$$\begin{array}{ll}
 & D_a(S \cup T) \\
= & \qquad \{\text{Definición de } (D_a)\} \\
 & \{w | aw \in (S \cup T)\} \\
= & \qquad \{\text{Definición de } (\cup)\} \\
 & \{w | aw \in S \vee aw \in T\} \\
= & \qquad \{\text{Separación de rango}\} \\
 & \{w | aw \in S\} \cup \{w | aw \in T\} \\
= & \qquad \{\text{Definición de } (D_a) \text{ (Dos veces)}\} \\
 & D_a S \cup D_a T
\end{array}$$

b) $D_a(S \cdot T) \;=\; \begin{cases} (D_a S) \cdot T \cup D_a T & \text{si} \;\; \lambda \in S \\ (D_a S) \cdot T & \text{si} \;\; \lambda \notin S \end{cases}$

Haremos una prueba por casos:

- Caso $\lambda \notin S$:

$$\begin{array}{ll}
 & D_a(S \cdot T) \\
= & \qquad \{\text{Definición de } (D_a)\} \\
 & \{w | aw \in (S \cdot T)\} \\
= & \qquad \{\text{Definición de } (\cdot)\} \\
 & \{w | (\exists u, v : aw = uv : u \in S \wedge v \in T)\} \\
= & \qquad \{u \text{ no puede ser } \lambda\} \\
 & \{w | (\exists u, v, y : aw = uv \wedge u = ay : u \in S \wedge v \in T)\} \\
= & \qquad \{\text{Regla de un punto}\} \\
 & \{w | (\exists v, y : aw = ayv : ay \in S \wedge v \in T)\} \\
= & \qquad \{\text{Definición de } (D_a)\} \\
 & \{w | (\exists v, y : aw = ayv : y \in D_a S \wedge v \in T)\} \\
= & \qquad \{\text{Propiedades de secuencias}\} \\
 & \{w | (\exists v, y : w = yv : y \in D_a S \wedge v \in T)\} \\
= & \qquad \{\text{Definición de } (\cdot)\} \\
 & \{w | w \in (D_a S) \cdot T\} \\
= & \qquad \{\{x | x \in A\} = A\} \\
 & (D_a S) \cdot T
\end{array}$$

- Caso $\lambda \in S$:

$$
\begin{array}{ll}
 & D_a(S\cdot T) \\
= & \qquad \{\text{Definición de } (D_a)\} \\
 & \{w | aw \in (S\cdot T)\} \\
= & \qquad \{\text{Definición de } (\cdot)\} \\
 & \{w | (\exists u, v : aw = uv : u \in S \wedge v \in T)\} \\
= & \qquad \{u \text{ puede o no ser } \lambda\} \\
 & \{w | (\exists u, v : aw = uv \wedge (u \neq \lambda \vee u = \lambda) : u \in S \wedge v \in T)\} \\
= & \qquad \{\text{Separación de rango}\} \\
 & \{w | (\exists u, v : aw = uv \wedge u \neq \lambda : u \in S \wedge v \in T) \vee (\exists u, v : aw = uv \wedge u = \lambda : u \in S \wedge v \in T)\} \\
= & \qquad \{\text{Separación de rango}\} \\
 & \{w | (\exists u, v : aw = uv \wedge u \neq \lambda : u \in S \wedge v \in T)\} \cup \{w | (\exists u, v : aw = uv \wedge u = \lambda : u \in S \wedge v \in T)\} \\
= & \qquad \{\text{El lado izquierdo del } \cup \text{ es análogo a la demostración anterior}\} \\
 & (D_aS)\cdot T \cup \{w | (\exists u, v : aw = uv \wedge u = \lambda : u \in S \wedge v \in T)\} \\
= & \qquad \{\text{Regla de un punto, } \lambda \in S\} \\
 & (D_aS)\cdot T \cup \{w | (\exists v : aw = v : v \in T)\} \\
= & \qquad \{\text{Regla de un punto}\} \\
 & (D_aS)\cdot T \cup \{w | aw \in T\} \\
= & \qquad \{\text{Definición de } (D_a)\} \\
 & (D_aS)\cdot T \cup D_aT
\end{array}
$$

c) $D_a(L^*) \ = \ (D_aL)\cdot L^*$

$$
\begin{array}{ll}
 & D_a(L^*) \\
= & \qquad \{\text{Definición de } (D_a)\} \\
 & \{w | aw \in (L^*)\} \\
= & \qquad \{\text{Definición de } (L^*)\} \\
 & \{w | aw \in (\{\lambda\} \cup L\cdot L^*)\} \\
= & \qquad \{\text{Separación de rango}\} \\
 & \{w | aw \in \{\lambda\}\} \cup \{w | aw \in L\cdot L^*)\} \\
= & \qquad \{\text{Definición de } (D_a) \text{ (Dos veces)}\} \\
 & D_a\{\lambda\} \cup D_a(L\cdot L^*) \\
= & \qquad \{D_a\{\lambda\} = \emptyset\} \\
 & D_a(L\cdot L^*)
\end{array}
$$

Ahora, λ puede o no pertenecer a L, hagamos una prueba por casos:

- Caso $\lambda \notin L$:

$$
\begin{array}{ll}
 & D_a(L\cdot L^*) \\
= & \qquad \{\text{Propiedad (b) de } (D_a)\} \\
 & (D_aL)\cdot L^*
\end{array}
$$

- Caso $\lambda \in L$:

$$
\begin{array}{ll}
 & D_a(L\cdot L^*) \\
= & \qquad \{\text{Propiedad (b) de } (D_a)\} \\
 & (D_aL)\cdot L^* \cup D_a(L^*)
\end{array}
$$

Este resultado, cuando $\lambda \in L$, solamente nos asegura $(D_aL)\cdot L^* \subseteq D_a(L^*)$. Sin embargo, como no existe ninguna otra definición para $D_a(L^*)$, dicha relación de subconjunto es en realidad una igualdad.

Siendo así, en ambos caso demostramos que $D_a(L^*) \ = \ (D_aL)\cdot L^*$.

2 Ejercicios sugeridos

1. Sobre el alfabeto $\Sigma = \{0, 1\}$, sea L es lenguaje de los números binarios (sin 0's inútiles).

   Diga que conjuntos representan a los siguientes lenguajes:

   (a) $D_0 L$

   (b) $D_1 L$

2. Sobre el alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$, sea $L = \{w | w.count(a) = w.count(b)\}$

   Definimos $w.count(a)$ como la cantidad de ocurrencias del símbolo a en la frase w. Formalmente, podría definirse de la sigiente forma:

$$\lambda.count(a) = 0$$

$$(bw).count(a) = \begin{cases} 1 + w.count(a) & \text{si } a = b \\ w.count(a) & \text{si } a \neq b \end{cases}$$

   Diga que conjuntos representan a los siguientes lenguajes:

   (a) $D_a L$

   (b) $D_b L$

   (c) $D_{ab} L$

   (d) $D_{bab} L$

3. Demuestre que $D_{bu} L = D_u(D_b L)$, si $u \in \Sigma^* \wedge b \in \Sigma$

4. Demuestre que $\bigcup_{a \in \Sigma} (\{a\} \cdot D_a L) = L$, si $\lambda \notin L$

C. A. Perez. R. Monascal / Abril - Julio 2012